Nội dung

I – Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 tổng quát.

II – Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng.

III- Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

I. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Định nghĩa phương trình không thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (1)$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là các hàm liên tục.

Định nghĩa phương trình thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục.

I. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Cấu trúc nghiệm của phương trình không thuần nhất

$$\boxed{y_{tq} = y_0 + y_r}$$

y_{tq} là nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất.

y_0 là nghiệm tổng quát của pt thuần nhất.

y_r là nghiệm riêng của pt không thuần nhất.

Tập hợp các nghiệm của phương trình thuần nhất là không gian 2 chiều: $y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$y_1(x)$ là nghiệm riêng của pt thuần nhất (2)

Tìm nghiệm thứ hai ở dạng: $y_2 = y_1(x) \cdot u(x)$

$y_2' = y_1' u + y_1 u'; \qquad y_2'' = y_1'' u + 2 y_1' u' + y_1 u''$

$\Rightarrow y_1'' u + 2 y_1' u' + y_1 u'' + p\left(y_1' u + y_1 u'\right) + q y_1 u = 0$

$\left(y_1'' + p y_1' + q y_1\right) u + y_1 u'' + \left(2 y_1' + p y_1\right) u' = 0 \quad y_1 u'' + \left(2 y_1' + p y_1\right) u' = 0$

Đặt $z = u'$, có phương trình tách biến $y_1 z' + \left(2 y_1' + p y_1\right) z = 0$

$\Rightarrow u = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \qquad \Rightarrow y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$

I. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Tìm nghiệm riêng của (1) bằng phương pháp biến thiên hằng số: $y_r = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

$$\Rightarrow y_r' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'(x)$$

$$\Rightarrow y_r'' = C_1''y_1 + C_1'y_1' + C_1'y_1' + C_1'y_1'' + C_2''y_2 + C_2'y_2' + C_2'y_2' + C_2y_2''$$

Thay vào pt (1): $y_r'' + p(x)y_r' + q(x)y_r = f(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 & = & 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' & = & f(x) \end{cases}$$

Giải hệ tìm C_1', C_2'.

Suy ra $C_1(x), C_2(x)$

Nghiệm riêng: y_r Nghiệm tổng quát của (1): $y_{tq} = y_0 + y_r$

KẾT LUẬN:

Để giải phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

chỉ cần tìm một nghiệm riêng $y_1(x)$ của pt thuần nhất.

Từ nghiệm $y_1(x)$ suy ra: $y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$

Tìm nghiệm $y_r = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 & = & 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' & = & f(x) \end{cases} \Rightarrow C_1(x), C_2(x) \Rightarrow y_r$$

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất: $y_{tq} = y_0 + y_r$

Ví dụ Giải phương trình $x^2y'' - xy' + y = 4x^3$ (1)

Phương trình chuẩn: $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 4x$

Phương trình thuần nhất: $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ (2)

Đoán một nghiệm riêng của pt thuần nhất: $y_1(x) = x$

Tìm nghiệm riêng thứ hai của (2):

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx = x \cdot \int \frac{e^{\int \frac{1}{x}dx}}{x^2} dx = x \ln|x|$$

Tìm nghiệm riêng của pt (1) bằng PP biến thiên hằng số

Trong bài này ta đoán được: $y = x^3$

Nghiệm tổng quát của (1): $y_{tq} = y_0 + y_r = C_1 x + C_2 x \ln|x| + x^3$

Ví dụ Giải phương trình $y'' - (\tan x)y' + 2y = 0$

Đoán một nghiệm riêng: $y_1(x) = \sin x$

Tìm nghiệm riêng thứ hai của (2):

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx = \sin x \cdot \int \frac{e^{\int \tan x dx}}{\sin^2 x} dx$$

Ví dụ Giải phương trình $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$

Đoán một nghiệm riêng: $y_1(x) = x$

Tìm nghiệm riêng thứ hai của (2):

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx = x \cdot \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}}{x^2} dx$$

II. Ptrình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

Định nghĩa phương trình không thuần nhất hệ số hằng

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (1)$$

trong đó p, q là hằng số, và $f(x)$ là hàm liên tục.

Định nghĩa phương trình thuần nhất hệ số hằng

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (2)$$

trong đó p, q là các hằng số.

Giải phương trình thuần nhất: $y'' + py' + qy = 0, \quad (2)$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0$

TH 1: PTĐT có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2

Nghiệm tổng quát: $y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

TH 2: PTĐT có một nghiệm kép k_0

Nghiệm tổng quát: $y_0 = C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x}$

TH 3: PTĐT có một nghiệm phức $k_1 = a + bi$

Nghiệm tổng quát: $y_0 = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Trường hợp chung: Phương pháp biến thiên hằng số.

Xét hai trường hợp đặc biệt:

TH 1: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, P_n(x) là đa thức bậc n.

Tìm y_r ở dạng: $y_r = x^s e^{\alpha x} Q_n(x)$

s = 0, nếu α không là nghiệm của pt đặc trưng.

s = 1, nếu α là nghiệm đơn của pt đặc trưng.

s = 2, nếu α là nghiệm kép của pt đặc trưng.

$Q_n(x)$ là đa thức có bậc tối đa là n.

Để tìm các hệ số của $Q_n(x)$, thay y_r vào pt (1).

TH 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$

Tìm y_r ở dạng: $y_r = x^s e^{\alpha x}\left(H_k(x)\cos\beta x + T_k(x)\sin\beta x\right)$

s = 0, nếu $\alpha + i\beta$ không là nghiệm của pt đặc trưng.

s = 1, nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm đơn của pt đặc trưng.

H_k, T_k : hai đa thức bậc tối đa là $k = \max\{m, n\}$.

Để tìm các hệ số của H_k, T_k , thay y_r vào pt (1):

$$y_r'' + py_r' + qy_r = f(x)$$

Vì sinx và cosx độc lập tuyến tính nên các hệ số tương ứng bằng nhau.

Chú ý: 1) Có nguyên lý cộng dồn (chồng chất) nghiệm:

$$y'' + py' + qy = f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

nghiệm riêng của (1) có dạng $y_r = y_{r_1} + y_{r_2}$

y_{r_1} nghiệm riêng của pt: $y'' + py' + qy = f_1(x)$

y_{r_2} nghiệm riêng của pt: $y'' + py' + qy = f_2(x)$

2) $f(x) = P_n(x)$ là trường hợp 1: $f(x) = e^{0x} P_n(x)$

3) $f(x) = P_n(x)\cos\beta x$ là trường hợp 2:

$$f(x) = e^{0x}\left(P_n(x)\cos\beta x + 0\sin\beta x\right)$$

Ví dụ Giải phương trình $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2 \vee k_2 = 3$

Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

$f(x) = e^{-x} = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha = -1, P_n(x)$ bậc 0.

$y_r = x^s e^{\alpha x} Q_n(x)$ $\quad \alpha = -1, Q_n(x) = A$ (vì P_n bậc 0)

s = 0, vì $\alpha = -1$ không là nghiệm của pt đặc trưng.

$y_r = x^0 e^{-x} A = Ae^{-x}$ $\quad y_r' = -Ae^{-x}, y_r'' = Ae^{-x}$

$y_r'' - 5y_r' + 6y_r = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} + 5Ae^{-x} + 6Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{12}$

Kluận: Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \dfrac{1}{12}e^{-x}$

Ví dụ Giải phương trình $y'' + 4y = x^2$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2i \vee k_2 = -2i$

Nghiệm t/quát của pt th/nhất: $y_0 = e^{0x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$

$f(x) = x^2 = P_n(x)e^{0x} \Rightarrow \alpha = 0, P_n(x)$ bậc 2.

$y_r = x^s e^{\alpha x} Q_n(x) \qquad \alpha = 0, Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$ (vì P_n bậc 2)

s = 0, vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của pt đặc trưng.

$y_r = x^0 e^{0x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^2 + Bx + C \quad y_r' = 2Ax + B, y_r'' = 2A$

$y_r'' + 4y_r = x^2 \Leftrightarrow 2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}, B = 0, C = \frac{-1}{8}$

Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$

Ví dụ Giải phương trình $y'' + 2y' = 3x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0 \vee k_2 = -2$

Nghiệm t/quát của pt th/nhất: $y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}$

$f(x) = 3x = P_n(x)e^{0x} \Rightarrow \alpha = 0, P_n(x)$ bậc 1.

$y_r = x^s e^{\alpha x} Q_n(x) \qquad \alpha = 0, Q_n(x) = Ax + B$ (vì P_n bậc 1)

s = 1, vì $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của pt đặc trưng.

$y_r = x^1 e^{0x}\left(Ax + B\right) = Ax^2 + Bx \quad y_r' = 2Ax + B, y_r'' = 2A$

$y_r'' + 2y' = 3x \Leftrightarrow 2A + 2(2Ax + B) = 3x \Leftrightarrow A = \frac{3}{4}, B = \frac{-3}{4}$

Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

Ví dụ Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 2e^x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 1$

Nghiệm t/quát của pt th/nhất: $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$

$f(x) = 2e^x = P_n(x) e^{1\cdot x} \quad \Rightarrow \alpha = 1, P_n(x)$ bậc 0.

$y_r = x^s e^{\alpha x} Q_n(x) \qquad \alpha = 1, Q_n(x) = A \qquad$ (vì P_n bậc 0)

s = 2, vì $\alpha = 1$ là nghiệm kép của pt đặc trưng.

$y_r = x^2 e^x A = Ax^2 e^x \quad y_r' = Ae^x(2x + x^2), y_r'' = Ae^x(2 + 4x + x^2)$

$y_r'' - 2y_r' + y_r = 2e^x \qquad \Leftrightarrow A = \frac{3}{4}, B = \frac{-3}{4}$

Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r \quad = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

Ví dụ Giải phương trình $y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 4k + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow k_1 = 1 \vee k_2 = 3$

Nghiệm t/quát của pt th/nhất: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

$f(x) = e^{0\cdot x}(0.\cos 2x + \sin 2x)$

$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 2, P_n(x), Q_m(x)$ bậc 0.

$y_r = x^s e^{\alpha x}\left(T_k(x)\cos 2x + H_k(x)\sin 2x\right)$

$k = \max\{m, n\} = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = 0, T_k = A, H_k = B$

s = 0, vì $\alpha + i\beta = 2i$ không là nghiệm của pt đặc trưng.

$$y_r = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$y_r' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, y_r'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$y_r'' - 4y_r' + 3y_r = \sin 2x$$

$$\left(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x\right) - 4\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) +$$
$$+3\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) = \sin 2x$$

$$(-A-8B)\cos 2x + (8A-B)\sin 2x = \sin 2x$$

$$\begin{cases} -A-8B=0 \\ 8A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{8}{65}, B = \frac{-1}{65} \Rightarrow y_r = \frac{8}{65}\cos 2x - \frac{1}{65}\sin 2x$$

Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r = C_1e^x + C_2e^{3x} + \frac{8}{65}\cos 2x - \frac{1}{65}\sin 2x$

Ví dụ Giải phương trình $y'' + y = \cos x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = i \vee k_2 = -i$

Nghiệm t/quát của pt th/nhất: $y_0 = e^{0x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$

$$f(x) = e^{0\cdot x}(\cos x + 0.\sin x)$$

$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, P_n(x), Q_m(x)$ bậc 0.

$$y_r = x^s e^{\alpha x}\left(T_k(x)\cos x + H_k(x)\sin x\right)$$

$$k = \max\{m,n\} = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0, T_k = A, H_k = B$$

s = 1, vì $\alpha + i\beta = i$ là nghiệm của pt đặc trưng.

$$y_r = x\left(A\cos x + B\sin x\right) \qquad y_r' = (A+Bx)\cos x + (B-Ax)\sin x$$

$$y_r'' = \left(-2A - Bx\right)\sin x + \left(2B - Ax\right)\cos x$$

$$y_r'' + y_r = \cos x$$

$$\left(-2A - Bx\right)\sin x + \left(2B - Ax\right)\cos x + x\left(A\cos x + B\sin x\right) = \cos x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow A = 0, B = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow y_r = \frac{1}{2}x\sin x$$

Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$

Ví dụ Giải phương trình $y'' + y' + 2y = 2\sin x + \cos x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Nghiệm t.quát pt th.nhất: $y_0 = e^{\frac{-1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

$$f(x) = e^{0\cdot x}(\cos x + 2\sin x)$$

$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, P_n(x), Q_m(x)$ bậc 0.

$$y_r = x^s e^{\alpha x}\left(T_k(x)\cos x + H_k(x)\sin x\right)$$

$$k = \max\{m,n\} = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = 0, T_k = A, H_k = B$$

s = 0, vì $\alpha + i\beta = i$ không là nghiệm của pt đặc trưng.

$y_r = A\cos x + B\sin x$ $\qquad y_r' = -A\sin x + B\cos x$

$y_r'' = -A\cos x - B\sin x$ $\qquad y_r'' + y_r' + 2y_r = \cos x + 2\sin x$

$$-A\cos x - B\sin x - A\sin x + B\cos x + 2\left(A\cos x + B\sin x\right) = \cos x + 2\sin x$$

$$(A+B)\cos x + (-A+B)\sin x = \cos x + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=2 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{-1}{2}, B = \frac{3}{2} \Rightarrow y_r = \frac{-1}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$$

Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r$

$$y_{tq} = e^{\frac{-1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

Ví dụ Giải phương trình $y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow k_1 = k_2 = 2$

Nghiệm t/quát pt th/nhất: $y_0 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x + e^{2x}$

Sử dụng nguyên lý cộng dồn nghiệm

Tìm nghiệm riêng ứng với $f_1(x)$: $y'' - 4y' + 4y = x = f_1(x)$ (1)

$y_{r_1} = x^s e^{\alpha x}Q_n(x) \qquad \alpha = 0, Q_n(x) = Ax + B$ (vì P_n bậc 1)

s = 0, vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của pt đặc trưng.

$y_{r_1} = Ax + B$ Thay vào pt (1), ta có $A = B = \frac{1}{4} \Rightarrow y_{r_1} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

Tìm nghiệm riêng ứng với $f_2(x)$: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} = f_2(x)$ (2)

$y_{r_1} = x^s e^{\alpha x} Q_n(x)$ $\alpha = 2, Q_n(x) = A$ (vì P_n bậc 0)

s = 2, vì $\alpha = 2$ là nghiệm kép của pt đặc trưng

$y_{r_2} = x^2 e^{2x} A$ Thay vào pt (2), ta có $A = \frac{1}{2}$

Một nghiệm riêng của đề bài là:

$$y_r = y_{r_1} + y_{r_2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

Nghiệm t/quát: $y_{tq} = y_0 + y_r$

$$y_{tq} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

II. Hệ pt vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng.

Hệ phương trình vi phân (n phương trình, n hàm số)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $f(t)$ là các hàm theo t, liên tục.

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ là các hàm theo t.

II. Hệ pt vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình ở dạng ma trận: $\dfrac{dX}{dt} = AX + F(t) \quad (2)$

Hệ phương trình thuần nhất: $\dfrac{dX}{dt} = AX \quad (3)$

Nghiệm của hệ là hàm véctơ trên khoảng (a,b) có toạ độ là các hàm khả vi liên tục trên (a,b) và thoả hệ:

II. Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Cấu trúc nghiệm của hệ tuyến tính (2)

$$X_{tq} = X_0 + X_r$$

X_{tq} là nghiệm tổng quát của hệ pt không thuần nhất (2)

X_0 là nghiệm tổng quát của hệ pt thuần nhất (3)

X_r là nghiệm riêng của hệ pt không thuần nhất (2)

Phương pháp khử

Nội dung phương pháp khử là đưa hệ phương trình vi phân về phương trình vi phân cấp cao hơn bằng cách đạo hàm một phương trình rồi khử các hàm chưa biết.

Ưu điểm

Giải hệ phương trình rất nhanh.

Nhược điểm

Rất khó giải hệ nhiều phương trình, nhiều hàm.

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$

Lấy phương trình (2) trừ 4 lần phương trình (1).

$$-4x_1' + x_2' = -5x_2 \ (*)$$

Đạo hàm hai vế phương trình (2).

$x_2'' = 4x_1' + 3x_2' \quad \Rightarrow -4x_1' = 3x_2' - x_2''$ Thay vào pt (*)

$$3x_2' - x_2'' + x_2' = -5x_2 \qquad x_2'' - 4x_2' - 5x_2 = 0$$

$x_1(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$ Thay vào pt 2 của hệ

$$x_2(t) = -C_1e^{-t} + \frac{1}{2}C_2e^{5t}$$

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' &= 3x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' &= 2x_1 + 2x_2 + t \end{cases}$

Lấy phương trình (2) trừ 2 lần phương trình (1).

$$-2x_1' + x_2' = -4x_1 + t - 2e^t \quad (*)$$

Đạo hàm hai vế phương trình (1).

$x_1'' = 3x_1' + x_2' + e^t \Rightarrow x_2' = x_1'' - 3x_1' - e^t$ Thay vào pt (*)

$-2x_1' + x_1'' - 3x_1' - e^t = -4x_1 + t - 2e^t \quad x_1'' - 5x_1' + 4x_1 = t - e^t$

$x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{4t} + \frac{e^t}{9} + \frac{te^t}{3} + \frac{t}{4} + \frac{5}{16}$ Thay vào pt 1 của hệ

$$x_2(t) = -2C_1e^t + C_2e^{4t} - \frac{8e^t}{9} - \frac{2te^t}{3} - \frac{3t}{4} - \frac{11}{16}$$

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' &= 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$

Lấy phương trình (2) trừ 4 lần phương trình (1).

$$-4x_1' + x_2' = -10x_1 - 2x_3 \quad (*)$$

Lấy phương trình (3) trừ phương trình (1).

$$-x_1' + x_3' = -2x_1 + 2x_3 \quad (**)$$

Đạo hàm hai vế pt (1): $x_2' = x_1'' - 3x_1' - x_3'$

Thay vào pt (*): $-4x_1' + x_1'' - 3x_1' - x_3' = -10x_1 - 2x_3$

$$x_1'' - 7x_1' - x_3' = -10x_1 - 2x_3 \quad (***)$$

Cộng hai pt (**) và (***) $x_1'' - 8x_1' + 12x_1 = 0$

$x_1(t) = C_1e^{6t} + C_2e^{2t}$ Thay vào pt (**):

$x_3' - 2x_3 = 4C_1e^{6t}$ $\qquad x_3(t) = C_1e^{6t} + C_3e^{2t}$

Thay vào pt (1) của hệ, ta có: $x_2 = x_1' - 3x_1 - x_3$

$$x_2(t) = 6C_1e^{6t} + 2C_2e^{2t} - 3C_1e^{6t} - 3C_2e^{2t} - C_1e^{6t} - C_3e^{2t}$$

$$x_2(t) = 2C_1e^{6t} - (C_2 + C_3)e^{2t}$$

Nghiệm của hệ đã cho: $\begin{cases} x_1(t) = \cdots \\ x_2(t) = \cdots \\ x_3(t) = \cdots \end{cases}$

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' &= 6x_1 - 12x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_3' &= -4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \end{cases}$

Lấy phương trình (2) trừ phương trình (1).

$$-x_1' + x_2' = -5x_1 + 9x_2 \quad (1)$$

Lấy pt thứ ba của hệ cộng 3 lần pt đầu của hệ

$$3x_1' + x_3' = 14x_1 - 24x_2 \quad (2)$$

Đạo hàm hai vế pt (2): $x_3' = x_1' - 3x_2' - x_2''$

Thay vào pt (2): $4x_1' - 3x_2' - x_2'' = 14x_1 - 24x_2 \quad (3)$

Khử x_1 trong pt (1) và (3): $6x_1' - x_2' - 5x_2'' = 6x_2 \quad (4)$

Khử x_1' trong pt (1) và (3): $x_2' - x_2'' = -6x_1 + 12x_2 \quad (5)$

Đạo hàm hai vế (5): $x_2'' - x_2''' = -6x_1' + 12x_2' \quad (6)$

Rút x_1' thay vào (4): $x_2''' - 6x_2'' + 12x_2' - 6x_2 = 0$

Giải phương trình này ta được $x_2(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$

Thay vào (4) ta được $x_1(t)$

Thay vào đầu của hệ ta được $x_3(t)$

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ x_2' = -4x_1 - 6x_2 - 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$

Cộng hai phương trình đầu của hệ.

$$x_1' + x_2' = -2x_1 - 2x_2 \quad (1)$$

Lấy pt đầu trừ 3 lần pt đầu của hệ

$$x_1' - 3x_3' = -7x_1 - 5x_2 \quad (2)$$

Đạo hàm hai vế pt đầu: $-3x_3' = 2x_1' + 4x_2' - x_1''$

Thay vào pt (2): $3x_1' + 4x_2' - x_1'' = -7x_1 - 5x_2 \quad (3)$

Khử x_2 trong pt (1) và (3): $x_1' + 3x_2' - 2x_1'' = -4x_1 \quad (4)$

Khử x_2' trong pt (1) và (3): $x_1' + x_1'' = -x_1 - 3x_2 \quad (5)$

Đạo hàm hai vế (5): $x_1'' + x_1''' = -x_1' - 3x_2' \quad (6)$

Rút x_2' thay vào (4): $x_1''' + 3x_1'' - 4x_1 = 0$

Giải phương trình này ta được $x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t} + C_3te^{-2t}$

Thay vào (4) ta được $x_2(t)$

Thay vào đầu của hệ ta được $x_3(t)$

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' = 3x_2 - x_3 + t \\ x_3' = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2t \end{cases}$

Lấy 3 lần pt đầu trừ pt thứ hai của hệ.

$$3x_1' - x_2' = 3x_1 + x_3 + 3e^t - t \quad (1)$$

Lấy pt đầu trừ pt thứ 3 của hệ

$$x_1' - x_3' = 2x_1 - 2x_3 + e^t - 2t \quad (2)$$

Đạo hàm hai vế pt đầu: $-x_2' = x_1' - x_1'' + e^t$

Thay vào pt (1): $4x_1' - x_1'' = 3x_1 + x_3 + 2e^t - t \quad (3)$

Khử x_3 trong pt (2) và (3): $9x_1' - 2x_1'' - x_3' = 8x_1 + 5e^t - 4t \quad (4)$

Đạo hàm hai vế (3): $4x_1'' - x_1''' = 3x_1' + x_3' + 2e^t - 1 \quad (5)$

Rút x_3' thay vào (4):

$$x_1''' - 6x_1'' + 12x_1' - 8x_1 = 3e^t - 4t + 1$$

Giải phương trình này ta được

$$x_1(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3t^2e^{2t} - 3e^t + \frac{t}{2} + \frac{5}{8}$$

Thay vào pt đầu của hệ ta được $x_2(t)$

Thay vào pt hai của hệ ta được $x_3(t)$

Phương pháp trị riêng, véctơ riêng

$\frac{dX}{dt} = AX + F(t) \quad (2)$ A là ma trận thực, vuông cấp n.

Trường hợp 1: A chéo hoá được:

$A = PDP^{-1}$ $\qquad \frac{dX}{dt} = AX + F(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = PDP^{-1}X + F(t) \quad \Leftrightarrow P^{-1}\frac{dX}{dt} = DP^{-1}X + P^{-1}F(t)$$

Đặt $Y = P^{-1}X \quad \Rightarrow Y' = P^{-1}X'$

Ta có: $Y' = DY + P^{-1}F(t)$

Đây là các phương trình vi phân cấp 1 tách rời nhau.

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 + t \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

Chéo hoá A: $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Đặt $Y = P^{-1}X$ Ta có: $Y' = DY + P^{-1}F(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 4y_1 + \frac{2}{3}e^t + \frac{t}{3} \\ y_2' = y_2 + \frac{1}{3}e^t - \frac{t}{3} \end{cases}$$

hệ gồm hai ptrình vi phân tuyến tính cấp 1 riêng biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1e^{4t} - \frac{2}{9}e^t - \frac{t}{12} - \frac{1}{48} \\ y_2(t) = C_2e^t + \frac{t}{3}e^t + \frac{t}{3} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Nghiệm của hệ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' &= 3x_1 + x_2 + x_3 + 4t \\ x_2' &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 8 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad F(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Chéo hoá A (Xem Đại số tuyến tính)

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Đặt $Y = P^{-1}X$ Ta có: $Y' = DY + P^{-1}F(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' &= 2y_1 - 2t - 4 \\ y_2' &= 2y_2 - t + 6 \\ y_3' &= 6y_3 + t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) &= C_1 e^{2t} + t + 5/2 \\ y_2(t) &= C_2 e^{2t} + t/2 - 11/4 \\ y_3(t) &= C_3 e^{6t} - t/6 - 19/36 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ $X = PY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + t + 5/2 \\ C_2 e^{2t} + t/2 - 11/4 \\ C_3 e^{6t} - t/6 - 19/36 \end{pmatrix}$

Phương pháp trị riêng, véctơ riêng

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(t) \quad (2)$$

Trường hợp 2: A không chéo hoá được:

Mọi ma trận (thực hoặc phức) đều tam giác hoá được.

$A = PTP^{-1}$ với T là ma trận tam giác.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = PTP^{-1}X + F(t)$$

Đặt $Y = P^{-1}X \Rightarrow Y' = P^{-1}X'$ $\Leftrightarrow P^{-1}\frac{dX}{dt} = TP^{-1}X + P^{-1}F(t)$

Ta có: $Y' = TY + P^{-1}F(t)$ Đây là hệ tam giác, giải từ dưới lên.

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ x_2' = -4x_1 - 6x_2 - 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Đây là hệ thuần nhất.

A không chéo hoá được (Xem Đại số tuyến tính)

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0$$

$\lambda_1 = -2$ có một VTR độc lập tuyến tính $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1$ có một VTR độc lập tuyến tính $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gọi X_2 là cột thứ hai của ma trận P.

Tìm hai ma trận $P = \begin{pmatrix} -1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & -1 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = PTP^{-1} \Leftrightarrow AP = PT \Rightarrow AX_2 = mX_1 - 2X_2$ Chọn m = 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Chọn $\alpha = 1 \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Đặt $Y = P^{-1}X$ Ta có: $Y' = TY$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_2 \\ y_3' = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} \\ y_2(t) = C_2e^{-2t} \\ y_3(t) = C_3e^{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' = 3x_2 - x_3 + t \\ x_3' = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2t \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$$

A không chéo hoá được (Xem Đại số tuyến tính)

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^3 = 0$$

$\lambda_1 = 2$ có một VTR độc lập tuyến tính $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gọi X_2 là cột thứ hai của ma trận P.

Tìm hai ma trận $P = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = PTP^{-1} \Leftrightarrow AP = PT \quad \Rightarrow AX_2 = aX_1 + 2X_2$ Chọn a = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

Chọn $\alpha = 2 \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 2 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = PTP^{-1} \Leftrightarrow AP = PT \Rightarrow AX_3 = bX_1 + cX_2 + 2X_3$ Chọn b = 0,c=1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

Chọn $\alpha = 2 \quad \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Đặt $Y = P^{-1}X$ Ta có: $Y' = TY + P^{-1}F(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 2e^t - t \\ y_2' &= 2y_2 + y_3 - 2e^t + 3t \\ y_3' &= y_3 + 2e^t + 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) &= \\ y_2(t) &= C_2e^{2t} - C_3e^t - 2te^t - t/2 + 3/4 \\ y_3(t) &= C_3e^t + 2te^t - 2t - 2 \end{cases}$$

Nhận xét:

Giải hệ $X^{'} = AX + F(t)$ bằng phương pháp khử:

sau khi khử ta được phương trình vi phân tuyến tính cấp cao của một pt. Phương trình đặc trưng của pt này trùng với pt đặc trưng của ma trận A, hoặc trong một số trường hợp trùng với phương trình tối thiểu của A.

Phương pháp khử: 1) Khử lần lượt từng biến trong hệ.

2) trong quá trình khử: đạo hàm hai vế.

Hệ 3 pt, 3 ẩn: khử dễ dàng, hệ nhiều pt nhiều ẩn: khó